

Spis treści

Przedmowa	10
Rozdział I. Rodziny zbiorów	12
1. Pierścienie i półpierścienie zbiorów	12
A. Pojęcie rodziny (pod-)zbiorów. Działania na zbiorach	12
B. Zbiory i rodziny zbiorów domknięte względem działań	13
C. Pierścienie i półpierścienie	13
D. Pierścień generowany przez rodzinę zbiorów	15
E. Iloczyn półpierścieni	17
F. Mnożenie pierścieni	18
2. Ciała zbiorów, σ -pierścienie i σ -ciała	19
A. Ciała zbiorów	19
B. Ciało generowane przez rodzinę zbiorów	20
C. Sumy i przecięcia ciągów	21
D. Klasy monotoniczne i σ -pierścienie	22
E. σ -ciało generowane przez rodzinę. Zbiory borelowskie	24
F. Obcięcia rodzin	25
Rozdział II. Funkcje określone na rodzinach zbiorów	27
1. Miary addytywne	27
A. Definicja miary	27
B. Miary określone na półpierścieniach	29
C. Rozszerzenie miary z półpierścienia na generowany pierścień	29
D. Mnożenie miar określonych na półpierścieniach	31
2. Rozszerzenie Jordana. Miara Jordana	33
A. Miary wewnętrzna i zewnętrzna w sensie Jordana	33
B. Rozszerzenie Jordana	35
C. Rodzina zbiorów mierzalnych. Addytywność rozszerzenia Jordana	36
D. Zupełność rozszerzenia Jordana. Uzupełnienie miary	38

E.	“Rozszerzenia rozszerzeń”	39
F.	Miara Jordana	42
3.	Miary przeliczalnie addytywne	43
A.	Przeliczalna addytywność miary na półpierścieniu	43
B.	Przeliczalna addytywność w pierścieniach	45
C.	Mnożenie σ -addytywnych miar na półpierścieniach	49
4.	Twierdzenie Carathéodory’ego. Rozszerzenie Lebesgue’a	51
A.	Czego brakuje mierze Jordana?	51
B.	Miara zewnętrzna w sensie Lebesgue’a	51
C.	Warunek i twierdzenie Carathéodory’ego	55
D.	Rozszerzenie Lebesgue’a	57
E.	Jakie zbiory dodaje rozszerzenie Lebesgue’a do dziedziny miary?	58
F.	Co już więcej nie rozszerza się?	61
G.	Przestrzenie z miarami i ich podprzestrzenie	62
5.	Miara Lebesgue’a	63
A.	Konstrukcja miary Lebesgue’a	63
B.	Co zawsze jest mierzalne?	64
C.	Zewnętrzna i wewnętrzna regularność miary Lebesgue’a	64
D.	Kryteria mierzalności	66
E.	Niezmienniczość i unormowaność	67
F.	Czy wszystko w $\mathbb{R}$ jest mierzalne względem miary Lebesgue’a?	69
	Rozdział III. Całki	71
1.	Całki Riemanna i Darboux	71
A.	Rozbicia	71
B.	Funkcje schodkowe	72
C.	Całka funkcji schodkowej	72
D.	Własności całek funkcji schodkowych	74
E.	Porównywanie funkcji “prawie wszędzie”	75
F.	Sumy całkowite Riemanna i Darboux	76
G.	Definicje i równoważność całek Riemanna i Darboux	78
2.	Własności całki Riemanna-Darboux	79

A.	Ograniczoność funkcji całkowalnych	79
B.	Dalsze własności dolnych i górnych sum Darboux	80
C.	Jednorodność i addytywność całki	81
D.	Całka względem rozszerzenia Jordana miary na (pół-)pierścieniu	83
E.	Miara Jordana jako całka funkcji charakterystycznej	85
F.	Całkowalność w sensie Riemanna-Darboux funkcji na kostce	85
3.	Całka Lebesgue'a	89
A.	Zbieżność szeregów liczbowych	89
B.	Całka funkcji schodkowej nad rozbićciem przeliczalnym	90
C.	Obliczanie całek za pomocą funkcji prostych nieujemnych	93
D.	Rozszerzenie całki	96
4.	Własności całki Lebesgue'a	99
A.	Monotoniczność i równość zera	99
B.	Jednorodność i addytywność	101
C.	Część dodatnia i część ujemna	103
D.	Przestrzeń $\mathcal{L}^1(C, \mu)$ i $L^1(C, \mu)$	104
E.	Warunki konieczne całkowalności	104
F.	Mierzalność funkcji całkowalnej w sensie Lebesgue'a	106
G.	Kryterium całkowalności	107
H.	Rozbicia "poziome" a "pionowe"	109
5.	Klasyczne twierdzenia o funkcjach mierzalnych i całkach	110
A.	Funkcje mierzalne	110
B.	Mierzalność kresów i granic	112
C.	Całki względem miar niezupełnych	115
D.	Kryterium całkowalności funkcji o różnych znakach i wartościach nieskończonych	117
E.	Jak "ulepszyć" zbieżność i ciągłość?	119
F.	Twierdzenia graniczne	121
6.	Miary produktowe	125
A.	Pojęcie miary produktowej	125
B.	Czy warto rozszerzać miary przed mnożeniem?	126
C.	Obliczenie miary produktowej zbioru przez całkę	129

7.	Całkowanie względem miar produktowych	133
A.	Cięcia funkcji	133
B.	Całka nieujemnej funkcji mierzalnej	134
C.	Funkcje przyjmujące wartości różnych znaków	135
D.	Całka na podzbiorze produktu przestrzeni z miarami	137
E.	Produkty większej liczby przestrzeni z miarami	138
8.	Miary ze znakiem. Różniczkowanie miar	140
A.	Pojęcie miary ze znakiem	140
B.	Rozkład Hahna i rozkład Jordana	141
C.	Miara absolutnie ciągła względem innej miary	143
	Rozdział IV. Uogólnienia i podejścia alternatywne	147
1.	Miary regularne na przestrzeniach zwartych i lokalnie zwartych	147
A.	Klasy przestrzeni topologicznych i ich podzbiorów	147
B.	Zewnętrzna i wewnętrzna regularność miary	150
2.	Miary jako funkcje na rodzinach podzbiorów zwartych	153
A.	Zawężenie miary słabo regularnej do rodziny wszystkich podzbiorów zwartych	153
B.	Rozszerzenie miary na zbiorach zwartych na zbiory borelowskie	156
3.	Reprezentacja funkcjonałów określonych na przestrzeniach rzeczywistych funkcji ciągłych	160
A.	Przestrzeń funkcji ciągłych o nośnikach zwartych	160
B.	Funkcjonały określone na przestrzeniach funkcji	161
C.	Twierdzenie Riesz-Markowa-Kakutaniego o reprezentacji	162
4.	Miary i całki zespolone	166
A.	Pojęcie miary zespolonej. Wahanie miary	166
B.	Całkowanie funkcji schodkowych względem miar zespolonych	168
C.	Całki funkcji dowolnych	169
5.	Reprezentacja funkcjonałów liniowych ograniczonych	173
A.	Miara określa funkcjonał	173
B.	Funkcjonał określa miarę	173
C.	Ogólne postacie funkcjonałów liniowych ograniczonych	177

6. Miary rozmyte. Całka Choquet	179
A. Pojęcie miary rozmytej	179
B. Klasy miar rozmytych	180
C. Całki funkcji prostych względem miary rozmytej	181
D. Całki funkcji nieujemnych o nośnikach zwartych	182
E. Charakteryzacja funkcji całkowalnych w sensie Choquet	183
F. Najprostsze własności całki Choquet	186
G. Całki funkcji o dowolnych znakach	188
7. Reprezentacja funkcjonałów przez całkę Choquet. Całka Sugeno	189
A. Komonotoniczna addytywność	189
B. Całki Choquet względem miar wypukłych i wklęsłych	192
C. Twierdzenie Sugeno-Narukawy-Murofushiego o reprezentacji	194
D. Unormowane miary rozmyte i całka Sugeno	195
Skorowidz	197
Literatura	201